UDC: 004.942 DOI: https://doi.org/10.15407/jai2022.01.212

MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE FIELDS IN ANTENNA REFLECTORS OF SPACE VEHICLES

M. Berdnyk
National Technical University Dnipro Polytechnic, Ukraine
Dmitry Yavornytsky avenne, 19, Dnipro, 49005
mgb2006@ukr.net
http://orcid.org/0000-0003-4894-8995

Annotation. The main factor that determines the distortion of the shape of the reflectors in outer space is the temperature deformation due to the uneven distribution of heat fluxes in the structural elements. Therefore, it is important to develop models and methods for calculating temperature fields in reflectors with uneven distribution of heat fluxes on the surface. The use of such methods will reduce the number of expensive field experiments. The paper first constructs a mathematical model for calculating temperature fields in a parabolic reflex antenna, in the form of a paraboloid of rotation rotating at a constant angular velocity, taking into account the finite velocity of heat propagation as a boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic equation of thermal conductivity. that the thermophysical properties of the body are constant. At the initial moment of time, the body temperature is constant, and on the outer surface of the body are known values of heat flux which are continuous coordinate functions. To solve the obtained boundary value problem, a new integral transformation for a two-dimensional finite space was constructed. The formula of inverse transformation is given. Eigenvalues and eigenfunctions for the kernel of integral transformation are found using finite element methods and Galorkin. The division of the region into simplex elements was made. Thus the problem of finding eigenvalues and eigenfunctions was reduced to the algebraic problem of finding eigenvalues and eigenfunctions. After applying the constructed new integral transformation to the obtained boundary value problem, we obtained the Cauchy problem, the solution of which was found analytically. The obtained solution of the boundary value problem is twice continuously differentiated by spatial coordinates and once in time. The solution of the boundary value problem found can be used to modulate the temperature fields that occur in a parabolic reflex antenna. The paper first constructs a mathematical model for calculating temperature fields in a paraboloid rotating at a constant angular velocity, taking into account the finite velocity of heat propagation as a boundary value problem of mathematical physics for the hyperbolic equation of thermal conductivity with Neumann boundary conditions. Using the developed integral transformation, the temperature fields in the paraboloid in the form of convergent series by Fourier functions were found. The solution of the generalized boundary value problem of heat exchange of the paraboloid of rotation can be used to modulate the temperature fields that occur in the antenna reflectors of spacecraft.

Keywords: Boundary value problem, integral transformation, hyperbolic equation of thermal conductivity.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В АНТЕННИХ РЕФЛЕКТОРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ

М. Г. Бердник
Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна
проспект Дмитра Яворницького, 19, м.Дніпро, 49005
mgb2006@ukr.net
http://orcid.org/0000-0003-4894-8995

Анотація. Основним фактором, що визначає спотворення форми рефлекторів у відкритому космосі, є температурні деформації за рахунок нерівномірного розподілу теплових потоків по елементах конструкції. Тому актуальною є розробка моделей і методів для розрахунку температурних полів в рефлекторах при нерівномірному розподілі теплових потоків на поверхні. Застосування таких методів дозволить скоротити кількість дорогих натурних експериментів. У статті вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболічній рефлекторній антені у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана, за умови,

що теплофізичні властивості тіла є постійними. У початковий момент часу температура тіла є постійною, а на зовнішній поверхні тіла відомі значення теплового потоку, які є неперервні функції координат. Для вирішення отриманої крайової задачі було побудоване нове інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору. Приводиться формула оберненого перетворення. Власні значення і власні функції для ядра інтегрального перетворення знаходяться за допомогою методів кінцевих елементів Гальоркіна. При цьому було зроблено розбиття області на симплекс-елементи. Таким чином, задача знаходження власних значень і власних функцій зводилася до алгебраїчної задачі одержання власних значень і власних функцій. Після застосування до отриманої крайової задачі побудованого нового інтегрального перетворення одержали задачу Коші, розв'язки якої було знайдено аналітично. Отримане рішення крайової задачі є двічі неперервно диференційованим по просторовим координатам і один раз - за часом. Знайдений розв'язок крайової задачі може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають в параболічний рефлекторній антені.

Ключові слова: Крайова задача, інтегральне перетворення, гіперболічне рівняння теплопровідності.

Вступ

Для сучасного космічного радіозв'язку потрібне створення космічних апаратів (КА) з великогабаритними антенами, що мають високоточну форму поверхні, що відбиває (ФПВ). Умови їх функціонування на орбіті визначаються наступними основними факторами: невагомістю, вакуумом і високим рівнем сонячної радіації.

При цьому основним фактором, що визначає спотворення форми (ФПВ) рефлекторів у відкритому космосі, є температурні деформації за рахунок нерівномірного розподілу теплових потоків по елементах конструкції.

Постановка проблеми

Параболічний рефлектор є найпростішою формою рефлекторної антени. Переваги даної конфігурації засновані на геометричних властивостях параболи, оскільки сферичні хвилі, які випромінює джерело, розміщене в фокальній точці, перетворюються в плоскі хвилі, спрямовані уздовж осі обертання апаратури.

Тому актуальним є розробка моделей і методів для розрахунку температурних полів в рефлекторах при нерівномірному розподілі теплових потоків на поверхні. Застосування таких методів дозволить скоротити кількість дорогих натурних експериментів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питаннями конструювання та дослідженням термомеханічного поводження рефлекторів займалися багато зарубіжних і вітчизняних вчених [1-8].

Наразі недостатньо вивчені питання про розподіл температурних полів в рефлекторах, без знання яких неможливо здійснити їх технічну реалізацію з високими техніко-економічними показниками. Тому в наведеній роботі пропонується метод розрахунку температурних полів у параболічному рефлекторі, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла.

Мета статті

Метою статті є побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів у параболічній рефлекторній антені у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розрахунок температурного поля у тонкостінному параболоїді обертання (рис. 1). Рівняння твірних ліній у циліндричній системі координат (ρ, φ, z) для зовнішньої і внутрішньої бічних поверхонь відповідно є:

$$r^2 = 2pz, \qquad r^2 = 2p_1 z, \quad (p_1 < p).$$

Параболоїд обертається навколо осі OZ з постійною кутовою швидкістю ω, а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла постійна G_0, а на зовнішній та внутрішній бічних поверхнях параболоїда відомі значення теплових потоків $V(\varphi,z)$, $V_1(\varphi,z)$ відповідно.

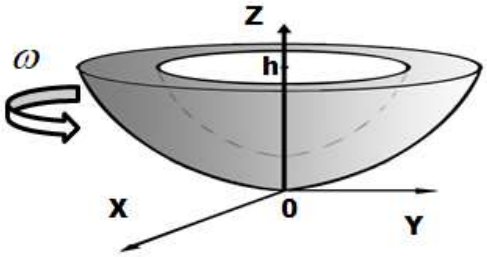

Рис. 1. Тонкостінний параболоїд обертання

При z = h відоме значення теплового потоку $V_3(r,\varphi)$.

У [9, 10] отримано узагальнене рівняння перенесення енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [10] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат приймає вигляд:

$$\gamma c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=$$
$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \qquad (1)$$

де γ – щільність середовища; c - питома теплоємність; $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища; λ - коефіцієнт теплопровідності; t -час; τ_r -час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля параболоїда складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$$D=\{(\rho,\varphi,z,t)\,|\,r\in(\sqrt{2p_1h},\sqrt{2ph}),\varphi\in(0,2\pi),$$
$$z\in(0,h),t\in(0,\infty)\},$$

що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=$$
$$a\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \qquad (2)$$

з початковими умовами

$$\theta(r,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(r,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}}e^{\frac{r-t}{\tau_r}}dr=G(\varphi,z), \qquad (4)$$

$$\int_0^t\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2p_1h}}e^{\frac{r-t}{\tau_r}}dr=G_1(\varphi,z), \qquad (5)$$

$$\int_0^t\left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=h}e^{\frac{z-t}{\tau_r}}dz=\Lambda(r,\varphi) \qquad (6)$$

де $\theta=\dfrac{T(r,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла; $G(\varphi,z)=\dfrac{V(\varphi,z)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $G_1(\varphi,z)=\dfrac{V_1(\varphi,z)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $\Lambda(r,\varphi)=\dfrac{V_3(r,\varphi)\tau_r}{\lambda(T_{\max}-G_0)}$; $G(\varphi,z),G_1(\varphi,z),\Lambda(r,\varphi)\in C(0,2\pi)$;

$a=\dfrac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності. Тоді рішення крайової задачі (2) – (6) $\theta(r,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно

диференційованим за r,φ,z, один раз за t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [11], тобто $\theta(r,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\bigcap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z), G_1(\varphi,z), \Lambda(r,\varphi)$, $\theta(r,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [12].

$$\begin{Bmatrix}\theta(r,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ G_1(\varphi,z)\\ \Lambda(r,\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ G_{1,n}(z)\\ \Lambda_n(r)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \quad (7)$$

де

$$\begin{Bmatrix}\theta_n(r,z,t)\\ G_n(z)\\ G_{1,n}(z)\\ \Lambda_n(r)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta(r,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ G_1(\varphi,z)\\ \Lambda(r,\varphi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\varphi)d\varphi;$$

$\theta_n(\rho,z,t)=\theta_n^{(1)}(\rho,z,t)+i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t)$; $G_n(z)=G_n^{(1)}(z)+iG_n^{(2)}(z)$; $G_{1,n}(z)=G_{1,n}^{(1)}(z)+iG_{1,n}^{(2)}(z)$; $\Lambda_n(\rho)=\Lambda_n^{(1)}(\rho)+i\Lambda_n^{(2)}(\rho)$;

i – уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta(r,\varphi,z,t)$ функція дійсна, надалі обмежимося розглядом $\theta_n(r,z,t)$ для n = 0, 1, 2,…, тому що $\theta_n(r,z,t)$ і $\theta_{-n}(r,z,t)$ будуть комплексно спряженими [12]. Підставляючи значення функцій з (7) у (2) – (6), в результаті одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}\theta_n^{(i)}+\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \quad (8)$$

з початковими умовами

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t}=0 \quad (9)$$

і граничними умовами

$$\int_0^t\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=\sqrt{2ph}}e^{\frac{r-t}{\tau_r}}dr=G_n^{(i)}(z), \quad (10)$$

$$\int_0^t\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=\sqrt{2p_1h}}e^{\frac{r-t}{\tau_r}}dr=G_{1,n}^{(i)}(z) \quad (11)$$

$$\int_0^t\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial z}\bigg|_{z=h}e^{\frac{z-t}{\tau_r}}dz=\Lambda_n^{(i)}(r). \quad (12)$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n;\ \vartheta_n^2=\omega n;\ m_1=2, m_2=1;$ $i=1,2.$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (8) з умовами (9) – (12) інтегральне перетворення Лапласа [12]:

$$\tilde f(s)=\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$$

У результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$s\tilde\theta_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\tilde\theta_n^{(m_i)}+\tau_r s\tilde\theta_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\tilde\theta_n^{(i)}=a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\tilde\theta_n^{(i)}}{\partial r}\right)-\frac{n^2}{r^2}\tilde\theta_n^{(i)}+\frac{\partial^2\tilde\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \quad (13)$$

з граничними умовами

$$\frac{\partial\tilde\theta_n^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=\sqrt{2ph}}=\tilde G_n^{(i)}(z), \quad (14)$$

$$\frac{\partial\tilde\theta_n^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=\sqrt{2p_1h}}=\tilde G_{1,n}^{(i)}(z), \quad (15)$$

$$\frac{\partial\tilde\theta_n^{(i)}}{\partial z}\bigg|_{z=h}=\tilde\Lambda_n^{(i)}(r), \quad (16)$$

де $\tilde G_n^{(i)}(z)=G_n^{(i)}(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; $\tilde G_{1,n}^{(i)}(z)=G_{1,n}^{(i)}(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; $\tilde\Lambda_n^{(i)}(z)=\Lambda_n^{(i)}(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$.

Для розв'язання крайової задачі (13)-(16) застосовуємо інтегральне перетворення [13 - 15]:

$$\bar{f}\left(\mu_{n,k}\right)=\iint\limits_{\mathrm{D}} Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)\cdot r\cdot \mathrm{f}\left(r,z\right)d\sigma. \tag{17}$$

Власні функції $Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв'язку спектральної задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r}-\frac{n^2}{r^2}Q+\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}+\mu_{n,k}\cdot Q=0 \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2p_1h}}=0,\qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial r}\right|_{r=\sqrt{2ph}}=0, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial z}\right|_{z=h}=0. \tag{20}$$

Власні функції $Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ в (18)-(20) знаходяться по формулам, які приведені в [15], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}\left(\rho,z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)}{\left\|Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)\right\|^2}\,\bar{f}\left(\mu_{n,k}\right). \tag{21}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (13) інтегральне перетворення (17), в результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\bar{\bar{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\bar{\bar{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}=$$
$$q_{n,k}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu_{n,k}}-\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}\right), \tag{22}$$

де $\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=\int\limits_0^h\left\{\sqrt{2pz}\cdot\left[Q\left(\mu_{n,k},\sqrt{2pz},z\right)\tilde{G}_n^{(i)}(z)\right]-\right.$

$$\left.-\sqrt{2p_1z}\cdot\left[Q\left(\mu_{n,k},\sqrt{2p_1z},z\right)\tilde{G}_{1,n}^{(i)}(z)\right]\right\}dz+$$

$$+\oint\limits_L r\left(Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)\frac{\partial\tilde{\theta}_n^{(i)}}{\partial z}-\tilde{\theta}_n^{(i)}\frac{\partial Q\left(\mu_{n,k},r,z\right)}{\partial z}\right)dl;$$

$$q_{n,k}=a\,\mu_{n,k}.$$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкненому додатно орієнтованому контуру (рис. 3).

Розв'язавши систему рівнянь (22), одержуємо

$$\bar{\bar{\theta}}_n^{(i)}=a\cdot\frac{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\Theta_{n,k}+\left(-1\right)^{i+1}\omega n\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}P}{\Theta_{n,k}^2+\omega^2n^2P^2}, \tag{23}$$

де $\Theta_{n,k}=\tau_r s^2+s+\mathrm{q}_{\mathrm{n,k}};\ \mathrm{P}=1+s\tau_r$

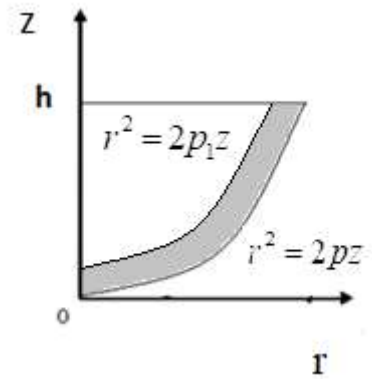

Рис. 3. Замкнутий контур із твірними лініями $r^2=2p_1z,\ \ r^2=2pz.$

Застосовуючи до зображення функцій (23) формули оберненого перетворення Лапласа [16], одержуємо оригінали функцій:

$$\bar{\theta}_n^{(1)}\left(\mu_{n,k},t\right)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\left[\mathrm{P}_j+\delta\,\mathrm{i}\right]+\right.$$
$$\left.\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\delta-\mathrm{P}_j\mathrm{i}\right]\right\}\Lambda+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}\left(s_j\right)\left\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}\left(s_j\right)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\mathrm{P}_j-\delta\,\mathrm{i}\right]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}\left(s_j\right)\left[\delta+\mathrm{P}_j\mathrm{i}\right]\right\}\Lambda, \tag{24}$$

$$\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)=\sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)[\mathrm{P}_j+\delta\,\mathrm{i}]-$$

$$\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)[\delta-\mathrm{P}_j\mathrm{i}]\}\Lambda+\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot$$

$$\cdot[\mathrm{P}_j-\delta\,\mathrm{i}]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)[\delta+\mathrm{P}_j\mathrm{i}]\}\Lambda, \qquad (25)$$

де $\mathrm{P}_j=2\tau_r s_j+1;\ \delta=\tau_r\omega n;\ \Lambda=e^{s_j t}-1;$

$\zeta_{n,k}(s_j)=\dfrac{0.5s_j^{-1}}{\mathrm{P}_j^{\,2}+\delta^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2}=\frac{(\delta\cdot i-1)\pm\sqrt{(1+\delta\cdot i)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}$$

$$s_{3,4}=\frac{(\delta\cdot\mathrm{i}+1)\pm\sqrt{(1-\delta\cdot\mathrm{i})^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (7) і (21), одержуємо температурне поле параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, із урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(r,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\Xi_{n,k}(t)\frac{Q(\mu_{n,k},r,z)}{\|Q(\mu_{n,k},r,z)\|^2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp(\mathrm{i}n\varphi),$$

де $\Xi_{n,k}(t)=\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+\mathrm{i}\ \bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t).$

$\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$, $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються за формулами (24), (25).

Висновки

Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури в параболічної рефлекторної антени у вигляді параболоїда обертання, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності з граничними умовами Неймана. У роботі за допомогою нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору, а також методів кінцевих елементів і Гальоркіна знайдено температурне поле у вигляді збіжного ряду. Знайдений розв'язок крайової задачі може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають в параболічній рефлекторній антені.

References

1. Datashvili L., Lang M., Baier H., Sixt T. Membranes for Large and Precision Deployable Reflectors // European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005 (ESA SP–581). 10–12 May 2005, Noordwijk, The Netherlands.
2. Hedgepeth J. M. Accuracy potentials for large space antenna reflectors with passive structure // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1982. – Vol. 19, № 3. – P. 211–217.
3. Tabata M., Yamamoto K., Inoue T., Noda T., Miura K. Shape adjustment of a flexible space antenna reflector // Journal of intelligent material systems and structures. – 1992. – № 3. – P. 646–658.
4. Tanaka H. Design optimization studies for large–scale contoured beam deployable satellite antennas // Acta Astronautica. – 2006. – № 58. – P. 443–451.
5. Butov V. G., Ponomarev S. V., Solonenko V. A., Yaschuk A. A. Modelirovanie temperaturnyih deformatsiy reflektorov kosmicheskih apparatov// Izv. vuzov. Fizika. – 2004. – T.47. – #10. – S. 15–18.
6. Zimin V. N. Osobennosti rascheta raskryivay-uscheysya fermennoy kosmicheskoy konstruktsii// Problemyi mashinostroeniya i nadezhnosti mashin. –2005. – # 1. – S. 20–25.
7. Miura K., Miyazaki Ya. Konstruirovanie antennyi s rastyanutoy fermoy. //Aerokosmicheskaya tehnika, 1991, # 1. S. 61–69.
8. Ponomarev S. V. Transformiruemyie reflektoryi antenn kosmicheskih apparatov // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mehanika. – 2011. – #4. – S. 110–118.
9. Berdnyk M. H. Matematychne modeliuvannia temperaturnoho polia porozhnoho tsylindra, yakyi obertaietsia, z urakhuvanniam kintsevoi shvydkosti poshyrennia tepla. Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktsii. 2004. № 8. S. 41–47.
10. Berdnyk M. H. Matematychne modeliuvannia tryvymirnoi uzahalnenoi zadachi teploobminu sutsilnoho tsylindra, yakyi obertaietsia. Pytannia prykladnoi matematyky i matematychnoho modeliuvannia. Dnipropetrovsk, 2014. S. 26–35.
11. Romanovskiy P. I. Ryadyi Fure. Teoriya polya. Analiticheskie i spetsialnyie funktsii. Preobrazovaniya Laplasa. M.: Nauka, 1980. 336 s.

12. Galitsyin A. S., Zhukovskiy A. I. Integralnyie preobrazovaniya i spetsialnyie funktsii v zadachah teploprovodnosti / A.S.Galitsyin, A.I. Zhukovskiy.– Kiev., Naukova dumka. 1979. – 561 S.
13. Berdnyk M. H. Matematychna model i metod rishennia uzahalnenoi zmishanoi zadachi teploobminu porozhnoho izotropnoho tila obertannia. Matematychni mashyny i systemy. 2018. № 3. S. 125–134.
14. Berdnyk Mykhailo. The mathematic model of and method for solving a generalized mixed boundary problem of heat exchange for the empty isotropic rotary body. Kompiuterni nauky ta informatsiini tekhnolohii (CSIT 2018): (Lviv, 11–14 veresnia 2018 r.): materialy XIII mizhnar. nauk.-tekhn. konf. Lviv: Vezha i Ko, 2018. T. 1. S. 173–176.
15. Berdnyk M. H., Alekseiev O. M. Matematychna model i metod rishennia uzahalnenoi zadachi Dirikhle teploobminu paraboloida obertannia. Systemni tekhnolohii: rehionalnyi mizhvuzivskyi zb. nauk. pr. 2019. № 1. S. 12–18.
16. Kryilov V. I., Skoblya I. S. Metodyi priblizhennogo preobrazovaniya Fure i obratnogo preobrazovaniya Laplasa. M.: Nauka, 1974. 223 s.

Література

1. Datashvili L., Lang M., Baier H., Sixt T. Membranes for Large and Precision Deployable Reflectors // European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing 2005 (ESA SP–581). 10–12 May 2005, Noordwijk, The Netherlands.
2. Hedgepeth J. M. Accuracy potentials for large space antenna reflectors with passive structure // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1982. – Vol. 19, № 3. – P. 211–217.
3. Tabata M., Yamamoto K., Inoue T., Noda T., Miura K. Shape adjustment of a flexible space antenna reflector // Journal of intelligent material systems and structures. – 1992. – № 3. – P. 646–658.
4. Tanaka H. Design optimization studies for large–scale contoured beam deployable satellite antennas // Acta Astronautica. – 2006. – № 58. – P. 443–451.
5. Бутов В. Г., Пономарев С. В., Солоненко В. А., Ящук А. А. Моделирование температурных деформаций рефлекторов космических аппаратов// Изв. вузов. Физика. – 2004. – Т.47. – №10. – С. 15–18.
6. Зимин В. Н. Особенности расчета раскрывающейся ферменной космической конструкции // Проблемы машиностроения и надежности машин. –2005. – № 1. – С. 20–25.
7. Миура К., Миязаки Я. Конструирование антенны с растянутой фермой. // Аэрокосмическая техника, 1991, № 1. С. 61–69.
8. Пономарев С. В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2011. – №4. – С. 110–118.
9. Бердник М. Г. Математичне моделювання температурного поля порожнього циліндра, який обертається, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2004. № 8. С. 41–47.
10. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається. Питання прикладної математики і математичного моделювання. Дніпропетровськ, 2014. С. 26–35.
11. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 1980. 336 с.
12. Галицын А. С., Жуковский А. И. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А. С. Галицын, А. И. Жуковский.– Киев., Наукова думка. 1979. – 561 С.
13. Бердник М. Г. Математична модель і метод рішення узагальненої змішаної задачі теплообміну порожнього ізотропного тіла обертання. Математичні машини і системи. 2018. № 3. С. 125–134.
14. Berdnyk Mykhailo. The mathematic model of and method for solving a generalized mixed boundary problem of heat exchange for the empty isotropic rotary body. Комп’ютерні науки та інформаційні технології (CSIT 2018): (Львів, 11–14 вересня 2018 р.): матеріали XIII міжнар. наук.-техн. конф. Львів: Вежа і Ко, 2018. Т. 1. С. 173–176.
15. Бердник М. Г., Алексеєв О. М. Математична модель і метод рішення узагальненої задачі Діріхле теплообміну параболоїда обертання. Системні технології: регіональний міжвузівський зб. наук. пр. 2019. № 1. С. 12–18.
16. Крылов В. И., Скобля И. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обратного преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 223 с.

Стаття надійшла до редакції 07.02.22
Після обробки 20.02.22