

К. О. Веретельник¹, А. М. Чугай²

^{1,2} Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, Україна
просп. Науки, 9А, Харків, 61166

² Інститут енергетичних машин та систем імені А. М. Підгорного Національної академії наук України
вул. Комунальників, 2/10, Харків, 61046

¹ kostiantyn.veretelnyk@hneu.net

² chugay.andrey80@gmail.com

¹ <https://orcid.org/0009-0006-1114-8846>

² <https://orcid.org/0000-0002-4079-5632>

ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРОЄКТУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ СИГНАЛЬНИХ КОНФІГУРАЦІЙ У СИГНАЛЬНОМУ ПРОСТОРИ

К. Veretelnyk¹, A. Chuhai²

^{1,2} Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Ukraine
Nauky Ave, 9A, Kharkiv, 61166

² Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine
Komunalnykiv St., 2/10, Kharkiv, 61046

¹ kostiantyn.veretelnyk@hneu.net

² chugay.andrey80@gmail.com

¹ <https://orcid.org/0009-0006-1114-8846>

² <https://orcid.org/0000-0002-4079-5632>

GEOMETRIC DESIGN OF MULTIDIMENSIONAL SIGNAL CONFIGURATIONS IN SIGNAL SPACE

Анотація. У статті розглянуто задачу геометричного проектування багатовимірних сигнальних конфігурацій у сигнальному просторі за умов обмежень на енергію, амплітуду та геометричних обмежень. Показано, що формування ефективних сигнальних конфігурацій у багатовимірних евклідових просторах доцільно розглядати як задачу керованого просторового розміщення точок, геометрія якого безпосередньо визначає завадостійкість та енергетичні характеристики системи передавання інформації. Запропоновано геометрично орієнтований підхід до синтезу сигнальних конфігурацій, у межах якого задача проектування зводиться до оптимізаційної моделі пакування рівних неперетинних сфер у багатовимірному сигнальному просторі. Така постановка дозволяє узгоджено враховувати взаємні відстані між кодовими словами, обмеження на середню та пікову енергію сигналів, а також просторову рівномірність розміщення точок. Для реалізації процесу проектування використано інтелектуальні стратегії оптимізації, що поєднують локалізовані методи поліпшення, мультистартові схеми пошуку та інкрементальне формування конфігурації. На відміну від класичних регулярних конструкцій, які ґрунтуються на ґраткових структурах, запропонований підхід забезпечує отримання нерегулярних багатовимірних сигнальних конфігурацій, адаптованих до конкретних характеристик каналу та вимог системи зв'язку. Запропоновано методіку аналізу завадостійкості сформованих конфігурацій на основі дослідження мінімальної попарної відстані, локальної геометрії сусідства та нормованих енергетичних показників. Показано, що у просторах високої розмірності ефективність геометричного проектування визначається не лише глобальними відстаневими характеристиками, а й локальними геометричними властивостями сигнального простору. Отримані результати формують методичну основу для геометричного проектування багатовимірних сигнальних конфігурацій і можуть бути використані при створенні сучасних багатоканальних та багатовимірних систем передавання інформації.

Ключові слова: багатовимірні сигнальні конфігурації, пакування сфер, геометричне проектування, завадостійкість, оптимізаційний синтез.

Abstract. The paper addresses the problem of geometric design of multidimensional signal configurations in signal space under energy, amplitude, and geometric constraints. It is shown that the formation of efficient signal configurations in multidimensional Euclidean spaces can be appropriately interpreted as a problem of controlled spatial placement of points, whose geometry directly determines the noise immunity and energy characteristics of an information transmission system. A geometrically oriented approach to the synthesis of signal configurations is proposed, in which the design problem is reduced to an optimization model of packing equal non-overlapping spheres in a multidimensional signal space. Such a formulation makes it possible to consistently take into account the mutual distances between codewords, constraints on the average and peak signal energy, as well as the spatial uniformity of point placement. To implement the design process, intelligent optimization strategies are employed, combining localized improvement

methods, multistart search schemes, and incremental configuration construction. Unlike classical regular constructions based on lattice structures, the proposed approach enables the generation of irregular multidimensional signal configurations adapted to specific channel characteristics and communication system requirements. A method for analyzing the noise immunity of the obtained configurations is proposed, based on the study of the minimum pairwise distance, the local geometry of neighborhood, and normalized energy metrics. It is shown that in high-dimensional spaces the effectiveness of geometric design is determined not only by global distance-related characteristics, but also by the local geometric properties of the signal space. The obtained results provide a methodological basis for the geometric design of multidimensional signal configurations and can be used in the development of modern multichannel and multidimensional information transmission systems.

Keywords: multidimensional signal configurations, sphere packing, geometric design, noise immunity, optimization-based synthesis.

Вступ

Розвиток сучасних систем передавання та обробки інформації супроводжується дедалі ширшим використанням багатовимірних представлень сигналів, у яких інформаційні повідомлення описуються векторами у просторах великої розмірності. Такий підхід є характерним для багатоканальних і багаточастотних технологій зв'язку, зокрема для систем OFDM і MIMO, а також для сучасних інтегрованих систем передавання та зондування, де задіюється значна кількість ступенів свободи в часовій, частотній і просторовій областях [1–3]. У цих умовах істотний вплив на ефективність функціонування системи зв'язку має геометрична організація допустимих сигналів у сигнальному просторі.

Геометричний підхід до задач кодування інформації є одним із базових у сучасній теорії зв'язку. Відповідно до нього кожному кодовому слову ставиться у відповідність точка евклідового простору, тоді як завадові та шумові впливи моделюються як випадкові просторові збурення положення цієї точки [4]. Взаємні відстані між точками безпосередньо визначають імовірність помилки декодування, тоді як обмеження на енергетичні та амплітудні характеристики сигналів задають допустиму область їхнього розміщення у просторі [5,6]. Це природним чином приводить до геометричного формулювання задачі проєктування сигнальних конфігурацій.

Для евклідового каналу з адитивним шумом околиці окремих сигнальних точок зручно інтерпретувати у вигляді багатовимірних сфер. У такій інтерпретації задача побудови сигнальної конфігурації з

максимальним мінімальним взаємним рознесенням між кодовими словами зводиться до задачі розміщення неперетинних конгруентних гіперсфер у багатовимірному контейнері, що визначається енергетичними або амплітудними обмеженнями передавача [7,8]. Ця відповідність між задачами кодування та пакування гіперсфер створює можливість безпосереднього застосування методів геометричної оптимізації для аналізу та синтезу сигнальних структур.

У практичних системах зв'язку традиційно використовуються регулярні сигнальні конструкції, побудовані на основі решіткових структур, зокрема формати QAM та PSK [9]. Проте, за наявності жорстких обмежень на енергію, форму допустимої області розміщення або за специфічних статистичних властивостей каналу такі рішення не завжди забезпечують оптимальні характеристики, особливо у багатовимірних просторах [10]. Це зумовлює зростання інтересу до методів цілеспрямованого геометричного проєктування сигнальних конфігурацій із використанням оптимізаційних підходів.

Сучасні методи геометричного формування сигнальних конфігурацій ґрунтуються на багатокритеріальних постановках оптимізації, у межах яких одночасно враховуються мінімальні попарні відстані між кодовими словами, середня та пікова енергія сигналів, а також рівномірність просторового розміщення точок [11,12]. Для розв'язання таких задач у просторах великої розмірності ефективно застосовуються локальні, мультистартові та інкрементальні стратегії пошуку, що дають змогу долати багатомодальність задач пакування гіперсфер [13,14]. У результаті геометрія сигнальної

конфігурації формується як результат адаптивного оптимізаційного процесу, а не як вибір із заздалегідь фіксованого набору регулярних шаблонів.

У цій статті розглядається задача геометричного проектування багатовимірних сигнальних конфігурацій у сигнальному просторі на основі моделей оптимізаційного пакування багатовимірних сфер. Основну увагу зосереджено на геометричній інтерпретації сигнальних конфігурацій, методах оптимізаційного формування нерегулярних структур та аналізі їхніх геометричних і завадостійких властивостей у просторах високої розмірності.

Геометрична модель багатовимірних сигнальних конфігурацій

У межах геометричного підходу до задач кодування інформації сигнальна конфігурація трактується як скінченна множина точок у багатовимірному евклідовому просторі, кожній з яких відповідає окреме кодове слово або допустимий сигнал. Таке подання дозволяє описувати сигнали виключно в термінах їхнього просторового розміщення та взаємних відстаней між ними. Якщо система передавання використовує n незалежних параметрів сигналу, то природним математичним середовищем для їх опису є евклідовий простір розмірності n . У цьому випадку сигнальна конфігурація визначається як скінченна множина точок у просторі R^n , що задає допустимий набір кодів слів

$$X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}, \quad \mathbf{x}_i \in R^n, \quad (1)$$

де M – кількість допустимих кодів слів, тобто потужність сигнальної конфігурації.

Якість сформованої сигнальної конфігурації суттєво залежить від геометричного розміщення її точок у сигнальному просторі. За умови використання декодування за правилом найближчого сусіда визначальною характеристикою такої конфігурації є мінімальна попарна евклідова відстань між кодівими словами

$$d_{\min} = \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad (2)$$

Геометрично це означає, що навколо кожної точки \mathbf{x}_i можна побудувати гіперсферу радіуса $r = d_{\min} / 2$, причому ці кулі не перетинаються. Таким чином, сигнальна конфігурація з фіксованою мінімальною відстанню інтерпретується як конфігурація неперетинних конгруентних гіперсфер, центри яких збігаються з кодівими словами.

У реальних системах зв'язку розміщення кодів слів не може бути довільним, оскільки на сигнали накладаються енергетичні та амплітудні обмеження. Найпоширенішим є обмеження на пікову енергію, яке в геометричній інтерпретації означає, що всі точки конфігурації мають належати гіперсфері радіуса R з центром у початку координат:

$$\|\mathbf{x}_i\| \leq R, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3)$$

Тоді побудова сигнальної конфігурації (1) зводиться до задачі розміщення M конгруентних неперетинних гіперсфер радіуса r всередині гіперсфери радіуса R .

Таким чином, геометрична модель сигнальної конфігурації може бути формалізована у вигляді системи обмежень (3) та

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \geq 2r, \quad i \neq j, \quad (4)$$

де змінними є координати центрів \mathbf{x}_i , а параметри r і R визначають мінімальну відстань між кодівими словами та допустимий енергетичний рівень відповідно. Залежно від постановки задачі можливі різні варіанти оптимізації: максимізація радіуса гіперсфер r для заданих M і R , мінімізація радіуса контейнера R за фіксованих значень M і r або знаходження максимальної кількості точок M , які можуть бути розміщені за заданих значень r та R .

Особливістю цієї геометричної моделі є її універсальність. Вона дозволяє однаково коректно описувати як регулярні сигнальні конфігурації, побудовані на основі ґраткових структур, так і нерегулярні конфігурації, отримані шляхом чисельної оптимізації. У багатовимірних просторах великої розмірності геометрія задачі істотно ускладнюється: зростає

кількість можливих локальних конфігурацій, змінюється роль крайових областей контейнера та проявляються ефекти концентрації міри. Це робить задачу оптимального розміщення гіперсфер багатоекстремальною і вимагає застосування спеціалізованих стратегій інтелектуального пошуку.

Зведення задачі кодування інформації до задачі пакування багатовимірних сфер

Після формалізації сигнальної конфігурації як геометричної конфігурації точок у багатовимірному евклідовому просторі природним є перехід до інтерпретації задачі кодування інформації в термінах задачі пакування гіперсфер. Для здійснення такого переходу можливо безпосередньо застосовувати методи геометричної оптимізації для синтезу сигнальних конфігурацій.

Нехай передавач формує сигнали у вигляді векторів $\mathbf{x}_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, M$, які передаються каналом зв'язку з адитивним шумом. На вході приймача спостерігається вектор

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_i + \mathbf{z}, \quad (5)$$

де \mathbf{z} – випадковий шумовий вектор. За умови використання правила декодування за найближчим сусідом приймач обирає те кодове слово \mathbf{x}_j , для якого відстань $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|$ є мінімальною. У такій постановці правильність декодування визначається геометричним розташуванням кодових слів і величиною допустимого шумового збурення.

Якщо мінімальна відстань між будь-якими двома кодовими словами дорівнює d_{\min} (2), то означає, що будь-яке шумове збурення, норма якого не перевищує r , не призводить до помилки декодування. Таким чином, множина кодових слів породжує конфігурацію неперетинних сфер однакового радіуса, а завадостійкість системи безпосередньо пов'язується з характеристиками цього пакування.

З іншого боку, будь-яка допустима конфігурація неперетинних конгруентних сфер у багатовимірному просторі визначає

множину центрів, які можуть бути інтерпретовані як сигнальна конфігурація з гарантованою мінімальною відстанню між кодовими словами. Отже, між задачею кодування і задачею пакування гіперсфер встановлюється двостороння еквівалентність: побудова сигнальної конфігурації еквівалентна побудові конфігурації неперетинних гіперсфер, а оптимізація завадостійких характеристик конфігурації – оптимізації геометричного розміщення цих гіперсфер.

У реальних системах зв'язку до кодових слів додатково накладаються обмеження на допустиму область розташування сигналів. Найпоширенішим є обмеження на пікову енергію або норму сигналу, яке в геометричному трактуванні означає належність усіх центрів гіперсфер деякому контейнеру $\Omega \subset R^n$. Зокрема, у випадку обмеження (3) таким контейнером є гіперсфера радіуса R . Тоді задача побудови сигнальної конфігурації з M кодових слів зводиться до задачі розміщення M неперетинних гіперсфер радіуса r усередині контейнера Ω .

Узагальнену постановку задачі можна записати у вигляді знаходження множини центрів

$$X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}, \quad \mathbf{x}_i \in \Omega, \quad (6)$$

для яких виконуються умови (4).

Залежно від практичних вимог системи зв'язку, можливі різні варіанти цільових функцій. За фіксованих M і R може максимізуватися радіус гіперсфер r , що відповідає максимізації мінімальної відстані між кодовими словами. За фіксованих M і r може мінімізуватися радіус контейнера R , що відповідає зменшенню пікової енергії сигналів. У разі, коли мінімальна відстань задана заздалегідь, може розглядатися задача максимізації кількості кодових слів, які вміщуються в допустимому контейнері.

Важливим є те, що така постановка не накладає обмежень на регулярність або симетричність конфігурації. На відміну від класичних підходів, які використовують регулярні ґраткові конфігурації, оптимізаційне пакування гіперсфер дає змогу формувати нерегулярні геометричні структури, адаптовані до конкретних

обмежень каналу і критеріїв оптимальності. Це є принциповою перевагою геометрично-оптимізаційного підходу у багатовимірних просторах, де регулярні конструкції не завжди забезпечують найкращий компроміс між завадостійкістю та енергоефективністю.

Таким чином, зведення задачі кодування інформації до задачі розміщення багатовимірних сфер створює єдину математичну основу для аналізу та синтезу сигнальних конфігурацій. Саме ця еквівалентність дозволяє надалі застосовувати інтелектуальні оптимізаційні стратегії для побудови багатовимірних сигнальних конфігурацій з наперед заданими відстанями та енергетичними властивостями.

Інтелектуальний синтез та аналіз багатовимірних сигнальних конфігурацій

Після встановлення еквівалентності між задачею кодування інформації та задачею розміщення неперетинних багатовимірних сфер постає питання практичної побудови сигнальних конфігурацій на основі розроблених оптимізаційних моделей. На відміну від класичних підходів, що спираються на регулярні решіткові або заздалегідь фіксовані алгебраїчні конструкції, у запропонованому підході сигнальна конфігурація формується безпосередньо як результат розв'язання задачі оптимізаційного геометричного проектування.

Для заданих параметрів системи зв'язку. Зокрема розмірності простору, потужності конфігурації типу контейнера та енергетичних обмежень, будується задача оптимізаційного розміщення центрів гіперсфер. Розв'язок цієї задачі задає координати кодових слів, які безпосередньо використовуються як елементи сигнальної конфігурації.

Залежно від практичної постановки задачі можуть застосовуватися різні оптимізаційні критерії. Якщо основною метою є підвищення завадостійкості за фіксованої кількості кодових слів і заданого енергетичного обмеження, доцільною є

максимізація радіуса гіперсфер, розміщених у контейнері. Якщо ж необхідно мінімізувати енергетичні витрати за заданої мінімальної відстані, використовується постановка з мінімізацією радіуса контейнера. У випадку, коли кількість кодових слів не фіксована, розглядається задача максимального пакування гіперсфер у допустимій області.

Процес синтезу сигнальної конфігурації є багато екстремальним, особливо у просторах великої розмірності. Тому якість отриманого розв'язку істотно залежить від вибору початкової конфігурації. У межах підходу можуть використовуватися випадкові, регулярні або інкрементальні початкові розміщення. Інкрементальна (накопичувальна) стратегія передбачає послідовне додавання нових точок у ті області контейнера, де локальний запас відстані до вже розміщених центрів є найбільшим, що добре узгоджується з геометричною інтерпретацією задачі.

Для уточнення положення центрів застосовуються методи локальної оптимізації, блочно-координатні та ітеративні схеми, враховуючи лише активні геометричні обмеження. Це дозволяє зменшити обчислювальну складність, оскільки на практиці для кожної сигнальної точки істотними є лише найближчі сусіди. Для зменшення залежності результатів від стартових умов використовується мультистартова стратегія, за якої оптимізація виконується з декількох початкових конфігурацій, а підсумкова конфігурація обирається за найкращим значенням цільової функції.

Отримання координат центрів (6) не завершує процес побудови сигнальної конфігурації. Далі виконується нормування та постобробка конфігурації. Середня енергія конфігурації визначається як

$$E_{avg} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \|\mathbf{x}_i\|^2, \quad (7)$$

після чого координати масштабуються множенням на відповідний коефіцієнт, що забезпечує єдину енергетичну шкалу та коректне порівняння різних конфігурацій. Пікова енергія визначається максимальним

значенням $\|\mathbf{x}_i\|^2$ і задає геометричну межу контейнера.

Завадостійкість побудованих сигнальних конфігурацій аналізується на основі мінімальної попарної відстані між кодovими словами d_{\min} (2). Проте мінімальна відстань не вичерпує усіх аспектів стійкості до завад. Важливу роль відіграє структура локального сусідства, кількість найближчих сусідів та рівномірність розміщення точок у сигнальному просторі. Конфігурації з більш рівномірним розподілом центрів, навіть за однакового d_{\min} , зазвичай демонструють кращі практичні завадостійкі характеристики.

У високорозмірних просторах аналіз завадостійкості ускладнюється ефектами концентрації міри й зменшенням інтуїтивної наочності геометрії. Тому оцінювання якості сигнальних конфігурацій доцільно здійснювати з урахуванням нормованих відстаневих та енергетичних показників, а також структури попарних відстаней. Запропонований оптимізаційно-геометричний підхід дозволяє не лише будувати сигнальні конфігурації з великим значенням мінімальної відстані, але й аналізувати їхні завадостійкі властивості на основі геометрії отриманих конфігурацій.

Інтелектуальний синтез багатовимірних сигнальних конфігурацій у межах задачі оптимізаційного пакування сфер формує універсальну основу для побудови та аналізу сучасних кодovих структур, адаптованих до конкретних вимог систем зв'язку й особливо ефективних у багатовимірних сигнальних просторах.

Аналітична оцінка завадостійкості та енергетичної ефективності сигнальних конфігурацій

Завадостійкість багатовимірної сигнальної конфігурації, побудованої на основі оптимізаційного пакування гіперсфер, у першу чергу зумовлюється геометрією розміщення кодovих слів у сигнальному просторі. Ключовим геометричним параметром є мінімальна попарна евклідова відстань між кодovими

словами d_{\min} . За умови декодування за принципом найближчого сусіда в каналі з адитивним шумом правильність розпізнавання забезпечується доти, доки шумове збурення не виводить прийнятий сигнал за межі області рішень відповідного кодovого слова. Геометрично це означає, що помилка декодування можлива лише у випадку, коли норма шумового вектора перевищує порогове значення $d_{\min}/2$. Збільшення мінімальної відстані безпосередньо підвищує запас завадостійкості сигнальної конфігурації.

Разом із тим, абсолютне значення мінімальної відстані не є самодостатньою характеристикою, оскільки будь-яка конфігурація може бути масштабована без зміни своєї геометричної структури. Тому для коректного порівняння сигнальних конфігурацій різного масштабу доцільно використовувати нормовані показники, що враховують енергетичні властивості конфігурації. З урахуванням введеної середньої енергії E_{avg} (7), може бути визначений нормований показник просторового рознесення

$$\eta = \frac{d_{\min}^2}{E_{avg}}. \quad (8)$$

Значення (8) є інваріантним до однорідного масштабування координат і дозволяє зіставляти завадостійкість різних сигнальних конфігурацій за однакової енергетичної шкали. Збільшення η відповідає більш ефективному використанню енергії для забезпечення просторового рознесення кодovих слів.

Окрім мінімальної відстані, суттєвий вплив на практичну завадостійкість має локальна геометрія конфігурації. Для кожного кодovого слова \mathbf{x}_i можуть бути визначені найближчі сусіди, які створюють основний внесок у ймовірність помилки. Кількість таких сусідів можна охарактеризувати величиною

$$N_i = \sum_{j \neq i} H(\alpha d_{\min} - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad (9)$$

де $H(\cdot)$ – функція Хевісайда, а $\alpha > 1$ – фіксований коефіцієнт, що визначає радіус локального околу.

Чим більшим є значення N_i (9), тим вищою є локальна щільність сигнальної конфігурації в околі точки \mathbf{x}_i , відповідно, тим більшою є ймовірність помилки розпізнавання цього кодового слова навіть за однакового глобального значення мінімальної відстані d_{\min} . Рівномірність розміщення центрів гіперсфер і мінімізація локальних скупчень безпосередньо впливають на практичну завадостійкість багатовимірних сигнальних конфігурацій.

У високорозмірних сигнальних просторах роль локальних геометричних ефектів зростає внаслідок концентрації міри та зменшення інтуїтивної наочності просторових структур [8,15]. За однакових значень мінімальної відстані різні конфігурації можуть демонструвати істотно відмінні завадостійкі властивості, що обумовлює необхідність комплексного аналізу геометричних та енергетичних показників. Оптимізаційно-геометричний підхід, заснований на пакуванні багатовимірних сфер, створює умови для цілеспрямованого керування цими характеристиками та формування сигнальних конфігурацій із підвищеною практичною завадостійкістю.

Інформаційна система моделювання сигнальних конфігурацій

Було розроблено інформаційну систему для побудови та дослідження багатовимірних сигнальних конфігурацій, що поєднує засоби постановки задачі, генерації математичних моделей, реалізації оптимізаційних алгоритмів, аналізу результатів, візуалізації конфігурацій та збереження обчислювальних експериментів. Така система є необхідним елементом практичного застосування розроблених методів і формує основу для створення спеціалізованого програмного комплексу підтримки задач кодування інформації на базі моделей пакування сфер.

Архітектура розробленої системи побудована за модульним принципом, що забезпечує розділення функціональності на логічно незалежні компоненти: постановка задачі, формування математичної моделі,

оптимізація, нормування, моделювання каналу, аналіз результатів, візуалізація та збереження експериментів.

Система побудована за принципом розділення на функціональні рівні: інтерфейс користувача (UI Layer); логічний рівень (Application Layer); обчислювальне ядро (Core Solver Layer); рівень даних (Data Layer) (рис. 1).

На рис. 2. показано головне меню розробленої системи, що поєднує роботу з усіма функціональними модулями з головного вікна.

За допомогою розробленої інформаційної системи були проведені числові експерименти для різних задач. Отримані результати демонструють, що оптимальне розміщення рівних гіперкуль дає змогу формувати багатовимірні сигнальні конфігурації, які узгоджуються як із геометричними властивостями евклідового простору, так і з шумовими характеристиками реальних ІМ/DD-каналів. У двох розглянутих практичних сценаріях 4-вимірному біомедичному ІМ/DD-каналі та 6-вимірному VLC-каналі експериментально отримані конфігурації (550 та 600 точок відповідно) підтвердили, що вибір радіуса пакування, визначений із шумових обмежень, забезпечує мінімальну міжсимвольну відстань, достатню для досягнення заданого рівня SER після ML-декодування.

Для обох прикладів спостерігається якісно однакова картина: емпіричні залежності символної ймовірності помилки $SER(SNR)$ узгоджуються з теоретичними характеристиками AWGN-каналу, а збільшення розмірності сигнального простору підсилює завадостійкість без порушення пікових обмежень передавача. Це свідчить, що багатовимірні конфігурації, отримані через пакування гіперкуль, природним чином масштабуються в умовах різних фізичних каналів ІМ/DD.

АРХІТЕКТУРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ConsteOpt

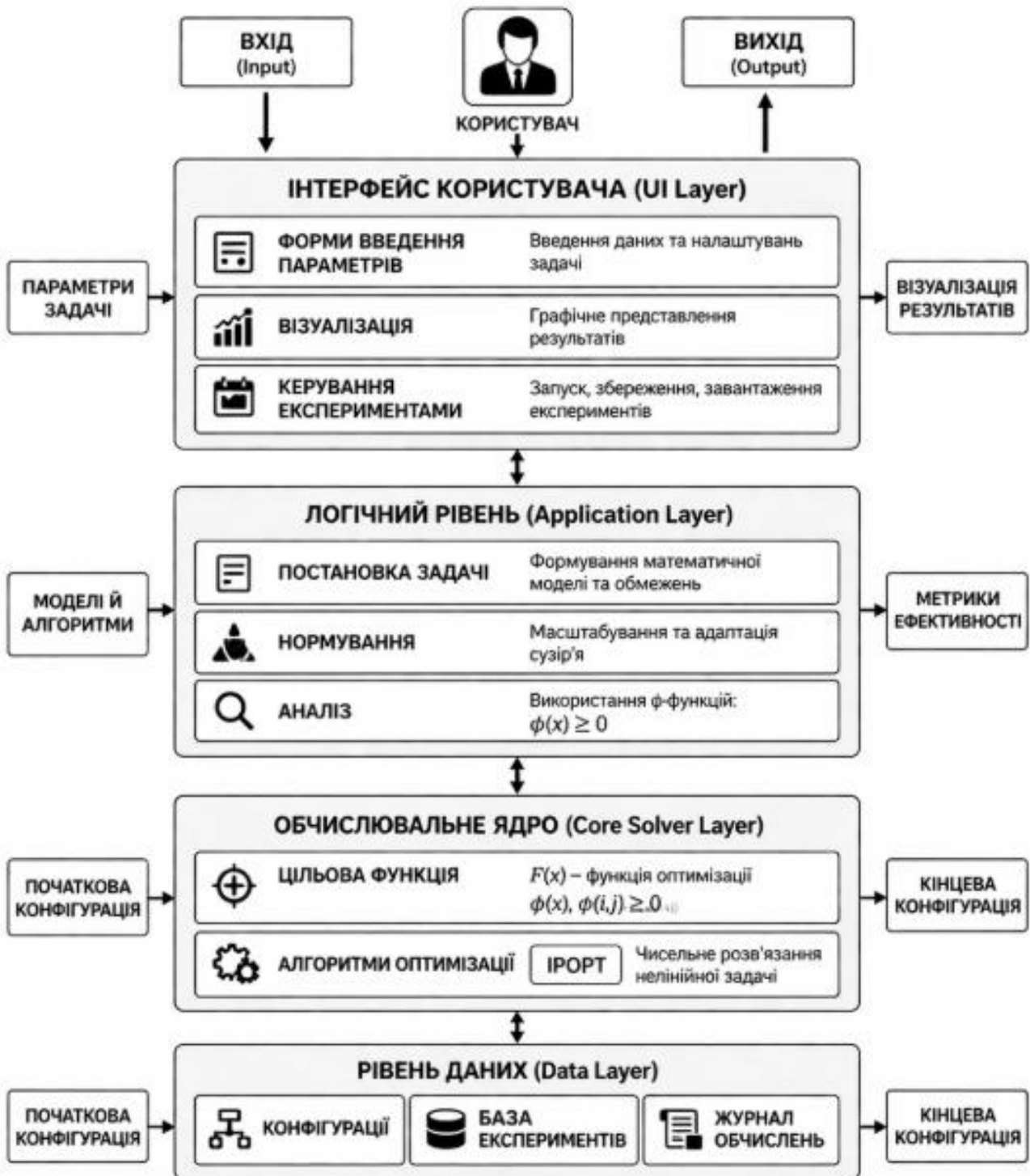


Рис. 1. Архітектура розробленої інформаційної системи

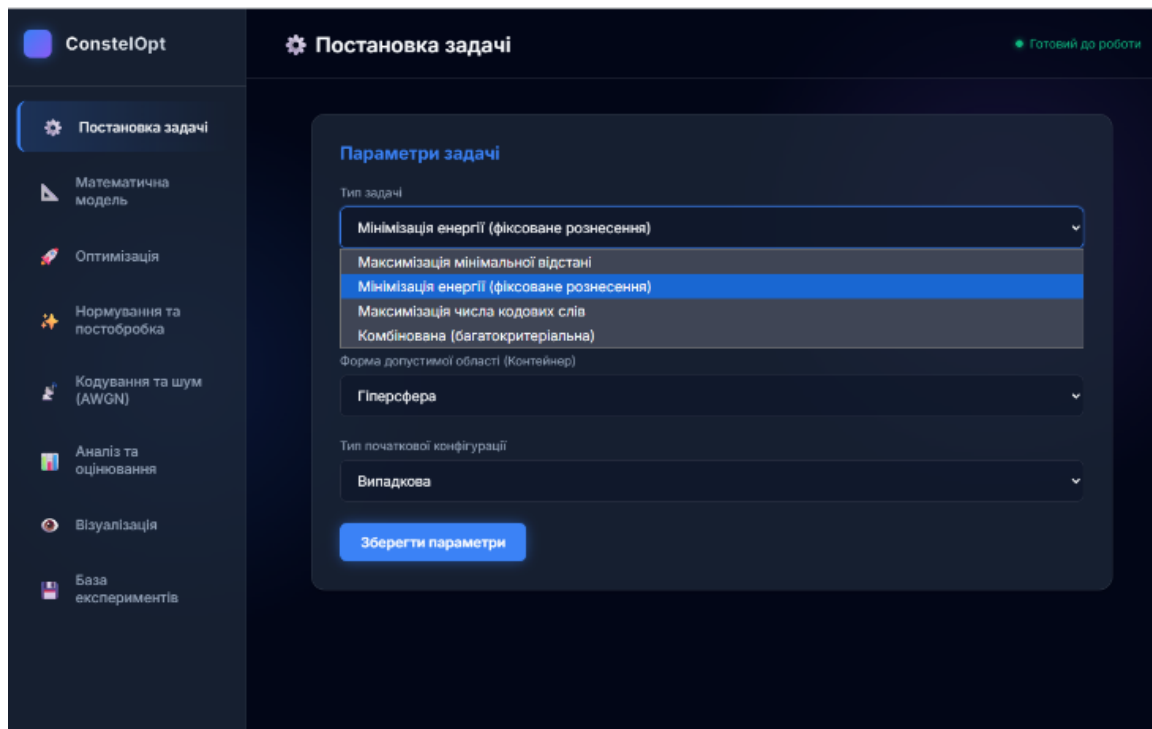


Рис. 2. Головне меню інформаційної системи

Висновки

У статті розглянуто задачу геометричного проектування багатовимірних сигнальних конфігурацій в умовах обмежень, характерних для евклідового каналу з адитивним шумом.

Показано, що процес кодування інформації доцільно інтерпретувати через задачу просторового розміщення неперетинних багатовимірних сфер у допустимій області сигнального простору, яка визначається енергетичними або амплітудними характеристиками передавача. Така інтерпретація забезпечує чітке геометричне трактування сигнальних конфігурацій і дозволяє формалізувати їхні відстаневі та енергетичні властивості в єдиній моделі.

Запропоновано підхід до інтелектуального синтезу сигнальних конфігурацій, у межах якого координати кодових слів визначаються як результат розв'язання оптимізаційної задачі пакування сфер. На відміну від класичних регулярних ґраткових рішень, запропонований підхід не пов'язаний із фіксованою симетрією конфігурації та надає можливість адаптивного формування геометрії сигнального набору відповідно до

конкретних вимог системи зв'язку. Використання локалізованих і мультистартових стратегій оптимізації забезпечує ефективну побудову нерегулярних конфігурацій у просторах великої розмірності.

Виконано аналітичну оцінку завадостійких властивостей сформованих сигнальних конфігурацій із урахуванням мінімальної попарної евклідової відстані, нормованих енергетичних показників та характеристик локального геометричного сусідства. Показано, що практична завадостійкість сигнальних конфігурацій визначається не лише глобальними відстаневими параметрами, а й локальною структурою розміщення кодових слів та рівномірністю заповнення сигнального простору.

Результати числових експериментів підтвердили коректність запропонованої геометрично-оптимізаційної моделі. Зокрема, показано, що вибір радіуса пакування, визначений на основі статистичних характеристик шуму та заданого рівня символічної ймовірності помилки, є необхідним і достатнім для забезпечення заданої завадостійкості сигнального набору. Для всіх

досліджуваних значень відношення сигнал/шум експериментальні результати узгоджуються з аналітичними оцінками, що свідчить про застосовність підходу до розглянутих практичних сценаріїв.

Отримані результати можуть бути використані як методична основа для геометричного проєктування багатомірних сигнальних конфігурацій у сучасних багатоканальних та багатомірних системах передавання інформації.

Література

1. D. Tse, P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge, Cambridge University Press (2005). doi10.1017/CBO9780511807213.
2. A. Mirani, "Multidimensional Constellation Shaping for Coherent Optical Communication Systems: PhD Thesis", Chalmers University of Technology Göteborg, Sweden (2022). <https://research.chalmers.se/publication/533728>.
3. B. Geiger, F. Liu, L. Schmalen, Joint Optimization of Geometric and Probabilistic Constellation Shaping for OFDM-ISAC Systems. 2025 IEEE 5th International Symposium on Joint Communications & Sensing (JC&S), Oulu, Finland (2025) 1–6. doi: 10.1109/JCS64661.2025.10880638.
4. G. D. Forney, L.-F. Wei, Multidimensional Constellations – Part I: Introduction, Figures of Merit, and Generalized Cross Constellations, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 7(6) (1989) 877–892. doi: <https://doi.org/10.1109/49.29611>.
5. E. Agrell, M. Karlsson, Power Efficient Modulation Formats in Coherent Communication Systems. *Journal of Lightwave Technology* 27(22) (2009) 5115–5126. doi: 10.1109/JLT.2009.2029064.
6. T. Matsumine, M. P. Yankov, S. Forchhammer, Geometric Constellation Shaping for Concatenated Two Level Multi Level Codes. *Journal of Lightwave Technology* 40(16) (2022) 5557–5566. doi: 10.1109/JLT.2022.3179529.
7. A. Favano, M. Ferrari, M. Magarini, L. Barletta, A Sphere Packing Bound for Vector Gaussian Fading Channels under Peak Amplitude Constraints. *IEEE Transactions on Information Theory* 69(1) (2022) 238–250. doi: 10.1109/TIT.2022.3203293.
8. S. Guo, K. Qu, Unified Integrated Sensing and Communication Signal Design: A Sphere Packing Perspective, *IEEE Transactions on Communications* 73(2) (2025) 1290–1303. doi: 10.1109/TCOMM.2024.3439436.
9. J. G. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, 5th ed., McGraw Hill, New York (2008).
10. G. Böcherer, Probabilistic Shaping and its Applications for Optical Communications. 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe &

- European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC) (2019) 1–1. doi: 10.1109/CLEOE-EQEC.2019.8873256.
11. A. Rode, L. Schmalen, Optimization of Geometric Constellation Shaping for Wiener Phase Noise Channels with Varying Channel Parameters. 2022 European Conference on Optical Communication (ECOC) (2022) 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9979193>.
12. O. Jovanovic, F. Da Ros, D. Zibar, M. P. Yankov, Geometric constellation shaping for fiber-optic channels via end-to-end learning. *Journal of Lightwave Technology* 41(12) (2023) 3726–3736. doi: 10.1109/JLT.2023.3276300.
13. V. Elser, Packing spheres in high dimensions with moderate computational effort. *Physical Review E* 108(3) (2023) 034117. doi: 10.1103/PhysRevE.108.034117.
14. Y. Stoyan, G. Yaskov, T. Romanova, I. Litvinchev, S. Yakovlev, J. M. V. Cantú, Optimized packing multidimensional hyperspheres: a unified approach. *Mathematical Biosciences and Engineering* 17(6) (2020) 6601–6630. doi: 10.3934/mbe.2020344
15. S. Zhou, T. Li, Z. Fang, J. Zhou, W. Zhang, Geometric constellation shaping for wireless optical intensity channels: an information-theoretic approach. *IEEE Communications Letters* 29(1) (2025) 215–219. doi: 10.1109/LCOMM.2024.3511129.

References

1. D. Tse, P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge, Cambridge University Press (2005). doi10.1017/CBO9780511807213.
2. A. Mirani, "Multidimensional Constellation Shaping for Coherent Optical Communication Systems: PhD Thesis", Chalmers University of Technology Göteborg, Sweden (2022). <https://research.chalmers.se/publication/533728>.
3. B. Geiger, F. Liu, L. Schmalen, Joint Optimization of Geometric and Probabilistic Constellation Shaping for OFDM-ISAC Systems. 2025 IEEE 5th International Symposium on Joint Communications & Sensing (JC&S), Oulu, Finland (2025) 1–6. doi: 10.1109/JCS64661.2025.10880638.
4. G. D. Forney, L.-F. Wei, Multidimensional Constellations – Part I: Introduction, Figures of Merit, and Generalized Cross Constellations, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 7(6) (1989) 877–892. doi: <https://doi.org/10.1109/49.29611>.
5. E. Agrell, M. Karlsson, Power Efficient Modulation Formats in Coherent Communication Systems. *Journal of Lightwave Technology* 27(22) (2009) 5115–5126. doi: 10.1109/JLT.2009.2029064.
6. T. Matsumine, M. P. Yankov, S. Forchhammer, Geometric Constellation Shaping for Concatenated Two Level Multi Level Codes. *Journal of Lightwave Technology* 40(16) (2022) 5557–5566. doi: 10.1109/JLT.2022.3179529.
7. A. Favano, M. Ferrari, M. Magarini, L. Barletta, A Sphere Packing Bound for Vector Gaussian Fading Channels under Peak Amplitude Constraints. *IEEE*

Transactions on Information Theory 69(1) (2022) 238–250. doi: 10.1109/TIT.2022.3203293.

8. S. Guo, K. Qu, Unified Integrated Sensing and Communication Signal Design: A Sphere Packing Perspective, IEEE Transactions on Communications 73(2) (2025) 1290–1303.

doi: 10.1109/TCOMM.2024.3439436.

9. J. G. Proakis, M. Salehi, Digital Communications, 5th ed., McGraw Hill, New York (2008).

10. G. Böcherer, Probabilistic Shaping and its Applications for Optical Communications. 2019 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC) (2019) 1–1.

doi: 10.1109/CLEOE-EQEC.2019.8873256.

11. A. Rode, L. Schmalen, Optimization of Geometric Constellation Shaping for Wiener Phase Noise Channels with Varying Channel Parameters. 2022 European Conference on Optical Communication (ECOC) (2022) 1–4.

<https://ieeexplore.ieee.org/document/9979193>.

12. O. Jovanovic, F. Da Ros, D. Zibar, M. P. Yankov, Geometric constellation shaping for fiber-optic

channels via end-to-end learning. Journal of Lightwave Technology 41(12) (2023) 3726–3736.

doi: 10.1109/JLT.2023.3276300.

13. V. Elser, Packing spheres in high dimensions with moderate computational effort. Physical Review E 108(3) (2023) 034117.

doi: 10.1103/PhysRevE.108.034117.

14. Y. Stoyan, G. Yaskov, T. Romanova, I. Litvinchev, S. Yakovlev, J. M. V. Cantú, Optimized packing multidimensional hyperspheres: a unified approach. Mathematical Biosciences and Engineering 17(6) (2020) 6601–6630. doi: 10.3934/mbe.2020344

15. S. Zhou, T. Li, Z. Fang, J. Zhou, W. Zhang, Geometric constellation shaping for wireless optical intensity channels: an information-theoretic approach. IEEE Communications Letters 29(1) (2025) 215–219.

doi: 10.1109/LCOMM.2024.3511129.

The article has been sent to the editors 30.04.26.

After processing 14.05.26.

Submitted for printing 30.06.26.

Copyright under license CCBY-SA4.0.